

4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

4.1. DEFINICIONES Y CLASIFICACIÓN DE SISTEMAS.

La ecuación de una recta en el plano tiene la forma $ax + by = c$; su generalización a n variables es: $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = b$, y recibe el nombre de **ecuación lineal**. Se llama **sistema de ecuaciones lineales**, o simplemente **sistema**, a una colección de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Un sistema lineal se puede representar matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Es decir, por $Ax = b$, donde $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times m}$ es la **matriz de coeficientes**, $x = (x_j) \in \mathcal{M}_{m \times 1}$ es el **vector de incógnitas**, y $b = (b_i) \in \mathcal{M}_{n \times 1}$ es el **vector de términos independientes**. La matriz que se obtiene añadiendo a la matriz de coeficientes el vector de términos independientes se llama **matriz ampliada del sistema**:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n \times (m+1)}$$

Dado el sistema $Ax = b$, con $A \in \mathcal{M}_{n \times m}$, se llama **solución** a todo vector columna $x^0 =$

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_m^0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times 1} \text{ que verifique todas las ecuaciones del sistema, es decir tal que } Ax^0 = b.$$

Según el número de soluciones, los sistemas se clasifican en:

- **Sistema incompatible**, cuando no tienen soluciones.
- **Sistema compatible determinado**, cuando tiene una única solución.
- **Sistema compatible indeterminado**, cuando tienen más de una solución.

Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se llama **sistema homogéneo**, y siempre es compatible (al menos tiene la solución $\mathbf{x} = \mathbf{0}$)

El teorema de Rouché-Fröbenius clasifica cualquier sistema a partir de los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada. Su demostración se puede consultar en la bibliografía complementaria.

4.1.1. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de n ecuaciones lineales y m incógnitas, entonces:

1. Si $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A|\mathbf{b})$, el sistema es incompatible.
2. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|\mathbf{b}) = m = n^\circ$ de incógnitas, el sistema es compatible determinado.
3. Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|\mathbf{b}) = k < m = n^\circ$ de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

EJEMPLO 12

Clasificar el siguiente sistema según su solución:
$$\begin{cases} x - y - t = 1 \\ x - y - z - t = -1 \\ -x + y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

Solución:

Para clasificar el sistema según su solución, se comparan los rangos de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada del sistema. Ambos rangos pueden calcularse simultáneamente haciendo operaciones elementales por filas a la matriz ampliada:

$$\begin{aligned} (A|\mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Se obtienen rangos distintos: $\text{rango}(A) = 2$ y $\text{rango}(A|\mathbf{b}) = 3$. Por tanto, el sistema es incompatible.

4.2. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

4.2.1. SUSTITUCIÓN REGRESIVA

En la matriz de coeficientes de un sistema, cada columna representa a una variable o incógnita. Si dicha matriz está en forma escalonada por filas, se llama **variable ligada** a toda variable que tenga en su columna un pivote, y **variable libre** a toda variable que no tenga en su columna un pivote.

Para resolver un sistema cuya matriz de coeficientes está en forma escalonada por filas se puede seguir el siguiente método de sustitución regresiva:

1. Se comprueba que el sistema es compatible.
2. Se localizan los pivotes y, si hay variables libres, se asigna como valor un parámetro a cada variable libre.
3. Empezando por la última ecuación, las variables ligadas se despejan cada una en la ecuación en la que está su pivote, en función de las variables libres (si las hay) y las variables ligadas que ya han sido despejadas.

Observación

Se verifica que: $\text{rango}(A) + n^{\circ} \text{ de variables libres} = n^{\circ} \text{ total de variables}$.

EJEMPLO 13

Resolver, por el método de sustitución regresiva, el sistema
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Solución: Se construye la matriz ampliada del sistema, y se comprueba que la matriz de coeficientes está en forma escalonada por filas y que el sistema tiene solución:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array} \right)$$

$\text{rango}(A) = \text{rango}(A|\mathbf{b}) = 3 < 5 = n^{\circ} \text{ de incógnitas} \Rightarrow \text{sistema compatible indeterminado.}$

A continuación se marcan los pivotes. Son variables libres las que no tienen elementos marcados en su columna, es decir x_2 y x_4 . Estas dos variables recibirán como valor un

parámetro, las variables ligadas se despejan cada una de ellas en la ecuación en la que está su pivote, empezando por la última ecuación:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases} \xRightarrow{x_2=\lambda, x_4=\mu} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_2 = \lambda \\ x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_4 = \mu \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 1 - x_4 - x_5 = 1 - \mu \\ x_4 = \mu \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - x_2 - x_4 = -1 - \lambda - \mu \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 1 - \mu \\ x_4 = \mu \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - \lambda - \mu \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 1 - \mu \\ x_4 = \mu \\ x_5 = 0 \end{cases}, \text{ para todo escalar } \lambda \text{ y } \mu$$

4.2.2. SISTEMAS EQUIVALENTES

Dos sistemas se llaman **equivalentes** si tienen exactamente las mismas soluciones.

El siguiente teorema establece cómo encontrar sistemas equivalentes a uno dado:

Teorema:

Si $(A'|\mathbf{b}')$ se ha obtenido aplicando un número finito de operaciones elementales por filas a la matriz $(A|\mathbf{b})$, los sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$ son equivalentes.

Demostración: Sea $(A'|\mathbf{b}') = (E_r \dots E_2 E_1 A | E_r \dots E_2 E_1 \mathbf{b})$. Entonces, usando que toda matriz elemental es regular, se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^0 \text{ es solución de } A'\mathbf{x} = \mathbf{b}' &\Leftrightarrow A'\mathbf{x}^0 = \mathbf{b}' \Leftrightarrow E_r \dots E_2 E_1 A \mathbf{x}^0 = E_r \dots E_2 E_1 \mathbf{b} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow E_1^{-1} \dots E_r^{-1} E_r \dots E_1 A \mathbf{x}^0 = E_1^{-1} \dots E_r^{-1} E_r \dots E_1 \mathbf{b} \Leftrightarrow A\mathbf{x}^0 = \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x}^0 \text{ es solución de } A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Por tanto los sistemas son equivalentes.

4.3. MÉTODO DE GAUSS PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

Para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de n ecuaciones con m incógnitas, se puede seguir el siguiente **método de Gauss**:

1. Se considera la matriz ampliada del sistema: $(A|\mathbf{b})$.
2. Se obtiene una forma escalonada por filas de la matriz anterior: $(A_e|\mathbf{b}_e)$

3. El sistema $Ax = b$ es equivalente al sistema $A_e x = b_e$ cuya solución, en caso de existir, puede obtenerse por sustitución regresiva.

EJEMPLO 14

Resolver por el método de Gauss el sistema siguiente:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

Solución:

Se considera la matriz ampliada del sistema, y se obtiene una forma escalonada por filas:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) = (A_e|b_e)$$

Se resuelve el sistema equivalente:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$
, cuya solución se obtuvo por

sustitución regresiva en el ejemplo 13.



Karl Friedrich Gauss

- Nació en Brunswick en 1777, y es considerado uno de los matemáticos más grandes de la historia.
- Aprendió a calcular antes que hablar.
- A los 8 años asombró a su profesor sumando los 100 primeros números naturales en breves instantes (agrupándolos en 50 parejas que suman lo mismo: 1+100, 2+99, ..., 50+51).
- A los 22 años se doctoró en la Universidad de Göttingen.
- Trabajó en todas las ramas de la matemática, pero solo publicó la mitad de sus descubrimientos.
- Protegió a Sophie Germain cuando la matemática no se consideraba una actividad de mujeres.
- Murió en Göttingen en 1855.

4.4. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN PARA LA RESOLUCIÓN DE SISTEMAS

El método de Gauss-Jordan para la resolución de sistemas es análogo al método de Gauss, sustituyendo en el punto (2) del proceso la matriz escalonada por filas ($A_e|\mathbf{b}_e$) por la matriz canónica por filas ($A_c|\mathbf{b}_c$).

EJEMPLO 15

Resolver por el método de Gauss-Jordan el sistema siguiente:
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 8x_3 = 6 \end{cases}$$

Solución:

Se considera la matriz ampliada y se obtiene su forma canónica por filas:

$$\begin{aligned} (A|\mathbf{b}) &= \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 8 & 6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 10 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (A_c|\mathbf{b}_c) \end{aligned}$$

$\text{rango}(A_c) = \text{rango}(A_c|\mathbf{b}_c) = 2 < 3 = n^\circ$ de incógnitas \Rightarrow el sistema es compatible indeterminado.

Es variable libre x_3 , y son variables ligadas x_1 y x_2 :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_3 = 2 \\ x_2 = 4 - 5x_3 = 4 - 5\lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 3x_3 = 2 - 3\lambda \\ x_2 = 4 - 5\lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 3\lambda \\ x_2 = 4 - 5\lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases}$$

4.5. ELIMINACIÓN DE PARÁMETROS

Todo conjunto de vectores con n componentes reales, que se definen explícitamente a partir de ciertos parámetros, de la forma:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 = b_1 + a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1r}\lambda_r \\ x_2 = b_2 + a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2r}\lambda_r \\ \vdots = \vdots \\ x_n = b_n + a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{nr}\lambda_r \end{cases}, \text{ con } \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \right\}$$

se puede interpretar como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

El problema de eliminar parámetros en T consiste en obtener un sistema de ecuaciones lineales del cual T sea su solución.

Para ello basta con considerar el mismo conjunto T como un sistema en las incógnitas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ e imponer que dicho sistema siempre tenga solución, haciendo que el rango de la matriz de coeficientes coincida con el rango de la matriz ampliada. De esta condición se obtendrá un sistema de ecuaciones lineales del cual el conjunto T es su solución.

EJEMPLO 16

Eliminar parámetros en el conjunto:

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x_1 = 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ x_2 = -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ x_3 = -1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ x_4 = 1 + \lambda_1 + \lambda_3 \end{array} \right. , \text{ con } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \left. \right\}$$

Solución:

Se considera el sistema de ecuaciones lineales siguiente: $\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = x_1 - 1 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = x_2 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = x_3 + 1 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = x_4 - 1 \end{cases}$ cuya matriz

ampliada es:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 - 1 \\ -1 & -1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & 1 & x_3 + 1 \\ 1 & 0 & 1 & x_4 - 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 + x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 2 & -2 & x_1 - x_4 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 + x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 2 & x_1 + 2x_2 + x_4 - 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 - 1 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 + x_2 - 1 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 + 2x_3 - x_4 + 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

El sistema verifica que el rango de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada si $x_1 + 2x_3 - x_4 + 2 = 0$

De donde se deduce que un sistema del cual T es solución es e formado por una sola ecuación:

$$\{x_1 + 2x_3 - x_4 + 2 = 0\}$$